

EJERCICIOS DE CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS COMO APLICACIÓN DE LAS INTEGRALES EULERIANAS Y DE LA INTEGRACIÓN POR DERIVACIÓN RESPECTO DE UN PARÁMETRO.

CALCULAR:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-4\sqrt{x}}}$. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^5 x}}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$. 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$.
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\tan x} dx$. 6. $\int_0^1 x^3 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^6 dx$. 7. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$. ($a > 0$)
8. $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$. 9. $\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx$. ($n \in \mathbb{N}$) 10. $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$. ($0 < m < n$)
11. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{x-3}}$. 12. $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$. 13. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$. ($n \in \mathbb{N}$)
14. Nuevas expresiones de $B(p, q)$ en los casos en que los límites de la integral sean:
i) (a, ∞) . ($a \neq 0$) ii) $(0, \infty)$.
15. $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$. 16. $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$. 17. $\int_3^\infty \frac{dx}{x^3 \sqrt{x-3}}$. 18. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^2}}$.
19. $\int_2^5 \frac{(x-2)^3}{\sqrt{5-x}} dx$. 20. $\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3(x-4)}}$. 21. $\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{(x-1)^4}}{x^5} dx$. 22. $\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^5)^3}} dx$.
23. $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$. 24. $\int_0^\infty x^{-2} e^{-x^2} dx$. 25. $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}}}$. 26. $\int_0^1 (\log x)^n dx$. (n par)
27. $\int_0^1 x^a (\log x)^n dx$. ($a > 0; n \in \mathbb{N}$) 28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \int_0^1 (1-x^2)^n dx$. ($n \in \mathbb{N}$)
29. $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$. ($n > 0$) 30. $\int_0^\infty \frac{x^m}{(a+bx^n)^p} dx$. ($a > 0; b > 0; n > 0$)
31. $\int_0^\infty \frac{\sin^{m-1} x}{(1+k \cos x)^n} dx$. ($n > 0$), ($0 < |k| < 1$) 32. $\int_0^\infty \frac{x^{p-1} \log x}{1+x} dx$. ($0 < p < 1$)
33. $\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{1+x^4} dx$. 34. $\int_0^\infty \frac{x \log x}{1+x^3} dx$. 35. $\int_0^\infty \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{(1+x) \log x} dx$. ($0 < p, q < 1$)
36. $\int_0^1 \log \Gamma(x) \sin \pi x dx$. 37. $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^2} dx$. ($0 < p < 2$) 38. $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \log x}{(1+x)^2} dx$.
39. $\iiint_\Omega \frac{dx dy dz}{1 - \cos x \cos y \cos z}$. $\Omega : 0 < x, y, z < \pi$
40. $\iiint_M \frac{dx dy dz}{1+x^\alpha + y^\beta + z^\gamma}$. $M : x, y, z > 0$. ($\alpha, \beta, \gamma > 0$); $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1 \right)$
41. Probar que $\prod_{m=1}^n \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^n} dx = \left(\frac{1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$. ($n \in \mathbb{N}$)
42. Probar que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+t^3}} + \log t \right] = \frac{\Gamma'(1)\Gamma(1/3) - \Gamma'(1/3)}{3\Gamma(1/3)} = -\frac{1}{3} \left(\gamma + \frac{\Gamma'(1/3)}{\Gamma(1/3)} \right)$.